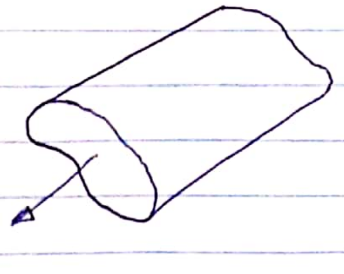
Guias de Ondas Metálicos (Parte-1)



guia genérico

Suporta ondas com polarização TE e TM.

polariz. TE $\Rightarrow$ $E_z = 0$
" TM $\rightarrow$ $H_z = 0$

Portanto, as componentes de campo para modos TE são:

$$E_x, E_y, H_x, H_y, H_z$$

e para modos TM:

$$H_x, H_y, E_x, E_y, E_z$$

Logo, assim como fizemos para as fibras ópticas, usaremos a componente z do campo $\bar{H}$ p/ resolver os modos TE e a componente z do campo $\bar{E}$ p/ resolver os modos TM.

Já que as soluções serão dadas em termos de E_z ou H_z (depende da polarização), então torna-se conveniente encontrar as relações das componentes transversais com as longitudinais. Assim, tomemos as equações de Maxwell:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon\bar{E} \quad (2)$$

A eq. 1 pode também ser escrita como:

$$\underbrace{\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)}_{\nabla_s} \times (\underbrace{\hat{x}E_x+\hat{y}E_y}_{\bar{E}_s}+\hat{z}E_z) = -j\omega\mu(\underbrace{\hat{x}H_x+\hat{y}H_y}_{\bar{H}_s}+\hat{z}H_z)$$

ou:

$$\left(\nabla_s+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\bar{E}_s+\hat{z}E_z\right) = -j\omega\mu\left(\bar{H}_s+\hat{z}H_z\right) \quad (3)$$

O mesmo pode ser feito com 2:

$$\left(\nabla_s+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\bar{H}_s+\hat{z}H_z\right) = j\omega\epsilon\left(\bar{E}_s+\hat{z}E_z\right) \quad (4)$$

Igualando as componentes transversais de 3 e 4:

$$\nabla_s\times\hat{z}E_z+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\times\bar{E}_s = -j\omega\mu\bar{H}_s \quad (5)$$

$$\nabla_s\times\hat{z}H_z+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\times\bar{H}_s = j\omega\epsilon\bar{E}_s \quad (6)$$

substituindo 5 p/ $\bar{H}_s$ em 6:

onde temos q: $\bar{H}_s = \frac{j}{\omega\mu}\left(\nabla_s\times\hat{z}E_z+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\times\bar{E}_s\right)$

$$\nabla_s\times\hat{z}H_z+\frac{\partial}{\partial z}\overset{\bar{A}}{\hat{z}}\times\frac{j}{\omega\mu}\left(\overset{\bar{B}}{\nabla_s}\times\overset{\bar{C}}{\hat{z}E_z}+\frac{\partial}{\partial z}\overset{\bar{B}\times\bar{C}}{\hat{z}\times\bar{E}_s}\right) = j\omega\epsilon\bar{E}_s \quad (7)$$

Identidade vetorial:

$$\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) = \bar{B}(\bar{A}\cdot\bar{C}) - \bar{C}(\bar{A}\cdot\bar{B}) \quad (8)$$

Logo, para o 1º termo entre parênteses:

$$\hat{z}\times(\nabla_s\times\hat{z}E_z) = \nabla_s(\hat{z}\cdot\hat{z}E_z) - \hat{z}E_z\cancel{(\hat{z}\cdot\nabla_s)}^{0} = \nabla_s E_z \quad (9)$$

Para o 2º termo:

$$\hat{z}\times(\hat{z}\times\bar{E}_s) = \hat{z}\cancel{(\hat{z}\cdot\bar{E}_s)}^{0} - \bar{E}_s(\hat{z}\cdot\hat{z}) = -\bar{E}_s \quad (10)$$

Portanto, (7) torna-se:

$$(-j\omega\mu)\cdot\left(\nabla_s\times\hat{z}H_z + \frac{j}{\omega\mu}\frac{d}{dz}\nabla_s E_z - \frac{j}{\omega\mu}\frac{d^2}{dz^2}\bar{E}_s\right) = \left(j\omega\epsilon\bar{E}_s\right)\cdot(-j\omega\mu) \quad (11)$$

Supondo q/ a dependência em z de $\bar{E}$ é da forma:

$$Ae^{-j\beta_z z} + Be^{j\beta_z z}$$

temos q/ $\frac{d^2}{dz^2} = -\beta_z^2$, e (11) torna-se:

$$\boxed{\bar{E}_s = \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2}\left[\frac{d}{dz}\nabla_s E_z - j\omega\mu\nabla_s\times\hat{z}H_z\right]} \ * \quad (12)$$

Após multiplicar ambos os lados de (11) por $(-j\omega\mu)$

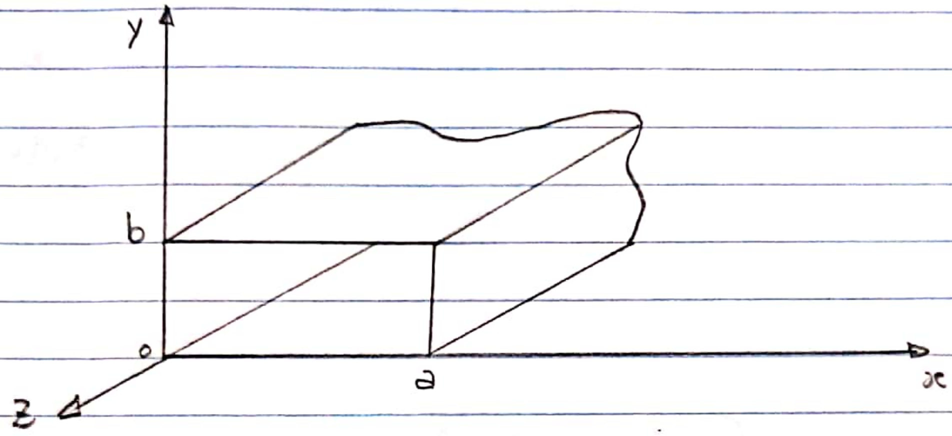
$$-j\omega\mu\nabla_s\times\hat{z}H_z + \frac{d}{dz}\nabla_s E_z - (-\beta_z^2)\bar{E}_s = \omega^2\mu\epsilon E_s$$

$$-E_s(\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2) = -\frac{d}{dz}\nabla_s E_z + j\omega\mu\nabla_s\times\hat{z}H_z$$

De maneira similar, podemos obter:

$$\boxed{\bar{H}_s = \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_z^2} \left[\frac{\delta}{\delta z} \nabla_s H_z + j\omega \epsilon \nabla_s \times \hat{z} E_z \right]} \quad * \qquad (13)$$

Guias de Ondas Retangulares:



Polarização TM : $H_z = 0$, $E_z \neq 0$

Partindo da equação de onda de Helmholtz:

$$\nabla^2 E_z + \omega^2 \mu \epsilon E_z = 0 \qquad (14)$$

Supondo propagação em z com dependência $e^{-j\beta_z z}$, a eq. (14) admite soluções do tipo:

$$E_z = E_0 \begin{Bmatrix} \sin(\beta_x x) \\ \cos(\beta_x x) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin(\beta_y y) \\ \cos(\beta_y y) \end{Bmatrix} e^{-j\beta_z z} \qquad (15)$$

Sabendo disso, a relação de dispersão p/ o guia retangular pode ser encontrada bastando q/ (15) seja substituída em (14):

Como $\nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$

fazendo por partes:

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2}\begin{Bmatrix}\sin(\beta_x x)\\ \cos(\beta_x x)\end{Bmatrix} = -\beta_x^2\begin{Bmatrix}\sin(\beta_x x)\\ \cos(\beta_x x)\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta y^2}\begin{Bmatrix}\sin(\beta_y y)\\ \cos(\beta_y y)\end{Bmatrix} = -\beta_y^2\begin{Bmatrix}\sin(\beta_y y)\\ \cos(\beta_y y)\end{Bmatrix}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta z^2} e^{-j\beta_z z} = -\beta_z^2 e^{-j\beta_z z}$$

Portanto,

$$\nabla^2 E_z + \omega^2\mu\epsilon E_z = (-\beta_x^2 - \beta_y^2 - \beta_z^2 + \omega^2\mu\epsilon)E_z = 0 \quad (16)$$

A relação (16) só é possível se:

$$\boxed{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 = \omega^2\mu\epsilon} \quad (17)$$

As condições de contorno requerem que:

$$E_z(x=0) = 0 \qquad E_z(y=0) = 0$$

A única solução possível é:

$$E_z = E_0 \sin(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \quad (18)$$

Da mesma forma:

$$E_z(x=a) = 0 \qquad E_z(y=b) = 0$$

Isso requer q/ :

$$\sin(\beta_x a) = 0 \quad e \quad \sin(\beta_y b) = 0 \quad , \text{ou}$$

$$\beta_x a = m\pi \ , \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\beta_y b = n\pi \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

No entanto, quando m ou $n = 0$, $\underline{E_z = 0}$.

Logo:

$$\beta_x = \frac{m\pi}{a} \qquad m \geq 1$$

$$\beta_y = \frac{n\pi}{b} \qquad n \geq 1$$

De (17), temos q:

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad (19)$$

Agora podemos obter as componentes transversais E_x, E_y, H_x e H_y ; basta aplicar (18) em (12) e (13) :

Como $H_z = 0$ (polariz. TM) :

$$\bar{E}_s = \frac{1}{\omega^2 \mu \epsilon - \beta_z^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} E_z + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} E_z \right) \right] \qquad (20)$$

$$\bar{H}_s = \frac{1}{\omega \mu \epsilon - \beta_z^2} \left[j\omega\epsilon \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x} E_z \right) \right] \qquad (21)$$

Assim, de (20) temos:

$$E_x = \frac{1}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} E_z$$

$$E_x = \frac{-j\beta_x\beta_z}{\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2} E_0 \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z}$$

De (17), temos q:

$$\omega^2\mu\epsilon - \beta_z^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \quad (22)$$

Logo:

$$E_x = \frac{-j\beta_x\beta_z}{\beta_x^2 + \beta_y^2} E_0 \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \quad (23)$$

$$E_y = \frac{-j\beta_y\beta_z}{\beta_x^2 + \beta_y^2} E_0 \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \quad (24)$$

Para as componentes de campo magnético, usamos (20) e (22):

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon\beta_y}{\beta_x^2 + \beta_y^2} E_0 \sin(\beta_x x)\cos(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \quad (25)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon\beta_x}{\beta_x^2 + \beta_y^2} E_0 \cos(\beta_x x)\sin(\beta_y y)\, e^{-j\beta_z z} \quad (26)$$

A solução p/ uma determinada escolha de m e n produz um modo TM_{mn}.

O <u>corte</u> de um modo TM_{mn} ocorrerá quando β_z for <u>puramente imaginário</u>.

Ou seja:

$$\omega^2 \mu \epsilon < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

ou

$$\omega < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \quad (27)$$

A frequência de corte torna-se:

$$\omega_{mnc} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} = \vartheta \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \quad (28)$$

se $\omega < \omega_{mnc}$ ou $f < f_{mnc}$ o modo não propaga.

O comprimento de onda de corte:

$$\lambda_{mnc} = 2\pi \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{-1/2} \quad (29)$$

A potência q/ flui pelo guia de onda é encontrada via teorema de Poynting: (average)

$$S_z = \frac{1}{2}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) \quad (30)$$

$$= \frac{\omega \epsilon \beta_x^2 \beta_z}{2(\beta_x^2 + \beta_y^2)^2} |E_0|^2 \cos^2(\beta_x x) \sin^2(\beta_y y) + \frac{\omega \epsilon \beta_y^2 \beta_z}{2(\beta_x^2 + \beta_y^2)^2} |E_0|^2 \sin^2(\beta_x x) \cos^2(\beta_y y)$$

$$= \frac{\omega \epsilon \beta_z}{2(\beta_x^2 + \beta_y^2)^2} |E_0|^2 \left[\beta_x^2 \cos^2(\beta_x x) \sin^2(\beta_y y) + \beta_y^2 \sin^2(\beta_x x) \cos^2(\beta_y y)\right] \quad (31)$$

Logo, a potência total:

$$P_z = \int_0^b dy \int_0^a dx\, S_z = \frac{\omega \epsilon \beta_z a b |E_0|^2}{8(\beta_x^2+\beta_y^2)^2} (\beta_x^2+\beta_y^2)$$

$$P_z = \frac{\omega \epsilon \beta_z a b |E_0|^2}{8(\beta_x^2+\beta_y^2)} \quad (32)$$